# Théorème de Kakutani

<u>Théorème :</u> Soient $G$ un groupe compact, $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes continu, et $\Omega \subset V$ un convexe $G$-stable (i.e pour tous $g \in G$, $x \in \Omega$, on a $\rho(g)(x) \in \Omega$) non vide. Alors il existe $x \in \Omega$ tel que pour tout $g \in G$, on ait $\rho(g)(x) = x$.

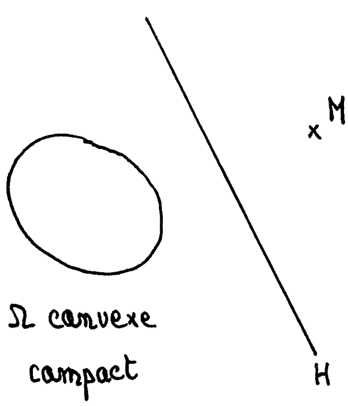
<u>Démonstration :</u>

- Quitte à remplacer $V$ par l'espace affine engendré par $\Omega$ (et à vectorialiser ce dernier), on peut supposer que $\Omega$ est d'intérieur non vide.
- Quitte à remplacer $\Omega$ par $\mathrm{Conv}(G \cdot v)$, où $v \in \Omega$, on peut supposer $\Omega$ compact.

Soit $\chi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ g & \longmapsto & |\det \rho(g)| \end{array}$, qui est un morphisme de groupes continu. L'image de $\chi$ étant alors un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_+^*$, on a $\chi(g) = 1$ pour tout $g \in G$.

Ceci permet d'affirmer que la mesure de Lebesgue est préservée par $G$ (i.e par toutes les applications $\rho(g)$, $g \in G$). L'isobarycentre $M = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega x \, d\lambda(x)$ est donc préservé par $G$.

Il reste à montrer que $M \in \Omega$. On raisonne par l'absurde, et on suppose donc que $M \notin \Omega$.




Par Hahn-Banach, on fixe un hyperplan affine $H$ séparant strictement $\Omega$ et $\{M\}$, i.e on fixe $\alpha < \beta$ et $\ell$ une forme linéaire sur $V$ tels que, pour tout $x \in \Omega$, on ait $\ell(x) < \alpha < \beta < \ell(M)$.

On a $\ell(M) = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \ell\left(\int_{x \in \Omega} x \, d\lambda(x)\right) = \frac{1}{\lambda(\Omega)} \ell\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega} x_i \, d\lambda(x) \, e_i\right)$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $V$

$$= \frac{1}{\lambda(\Omega)} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega x_i \, d\lambda(x) \, \ell(e_i)$$

$$= \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_\Omega \ell(x) \, d\lambda(x)$$

ce qui donne $\ell(M) \leq \frac{1}{d(\Omega)} \int_\Omega \alpha \, d\ell(x) = \alpha$, ce qui est absurde.

On a donc $M \in \Omega$ et, pour tout $g \in G$, $\rho(g)(M) = M$.

Application : Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Soit $G$ un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors $G$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration: Soit $G$ un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

On pose $\rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(S_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & (S \longmapsto {}^tA^{-1} S A^{-1}) \end{array}$, qui est un morphisme de groupes continu.

On pose de plus $E = \{ {}^tAA \, / \, A \in G \}$, qui est un compact de $S_n(\mathbb{R})$ inclus dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Son enveloppe convexe, notée $K$, est compacte (par Carathéodory) et convexe.

De plus, pour tous $A \in G$ et $M \in G$, on a $\rho(A)({}^tMM) = {}^tA^{-1}\,{}^tM M A^{-1} = {}^t(MA^{-1})MA^{-1} \in E$,

donc $E$ est $G$-stable, donc $K$ est $G$-stable, ce qui permet d'appliquer Kakutani.

On fixe alors $S \in K$ tel que pour tout $A \in G$, on ait ${}^tA^{-1} S A^{-1} = S$.

On note $R$ l'unique élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = S$ (car $S \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$).

Pour tout $A \in G$, on a ${}^tA^{-1} R^2 A^{-1} = R^2$, donc ${}^t(RA^{-1}R^{-1})(RA^{-1}R^{-1}) = I_n$, ce qui donne $RGR^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$,

ce qui achève la preuve.